

动能定理的推导

一、动能定理表述

合外力对物体所做的功等于物体动能的变化量，即

$$W_{\text{合}} = \Delta E_k = E_{k2} - E_{k1}$$

二、准备知识

在推导之前，先回顾三个基础物理规律：

1. 牛顿第二定律： $F = ma$ （ F 为合外力， m 为质量， a 为加速度）；
2. 运动学公式（匀变速直线运动）： $v_2^2 - v_1^2 = 2as$ （初末速度与位移的关系）；
3. 功的定义： $W = F \cdot s$ （恒力、位移方向与力同向时）。

三、推导过程

设质量为 m 的物体，在恒定合外力 F 作用下，沿力的方向发生位移 s ，速度由 v 变为 v （初末速度）。推导如下：

第一步：由牛顿第二定律，合外力与加速度的关系为

$$F = ma$$

第二步：由匀变速直线运动公式 $v_2^2 - v_1^2 = 2as$ ，可得

$$as = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2}$$

第三步：合外力对物体做的功为

$$W = Fs = ma \cdot s = m \cdot (as) = m \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

第四步：定义动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ ，则上式可改写为

$$W = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$

四、结论

合外力对物体做的功等于物体动能的变化，即动能定理：

$$W_{\text{合}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \Delta E_k$$

需要说明的是，上述推导针对恒力、直线运动的特殊情况。动能定理对变力做功、曲线运动同样成立——可将路径微元化，对每一小段应用上述关系再累加求和，即得普遍结论。