

两角和的正弦公式推导

一、公式目标

本推导旨在证明两角和的正弦公式：

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

推导采用坐标法（单位圆法），先证明两角差的余弦公式，再借助诱导公式得到两角和的正弦公式。

二、在单位圆上设点

在平面直角坐标系中作单位圆（圆心在原点，半径为 1）。设角 α 的终边与单位圆交于点 A，角 β 的终边与单位圆交于点 B。由三角函数的定义，两点的坐标分别为：

$$A(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad B(\cos \beta, \sin \beta)$$

其中 α, β 为任意角。

三、利用两点间距离公式建立等式

一方面，A、B 两点之间的夹角为 $\alpha - \beta$ ，其弧所对圆心角即 $\alpha - \beta$ 。根据单位圆上三角函数定义，A、B 两点间的距离也可以表示为角 $\alpha - \beta$ 的终边端点（坐标为 $(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta))$ ）到点 $(1, 0)$ 的距离。因此由两点间距离公式，可得如下等式：

$$(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2$$

四、化简得到两角差的余弦公式

对等式两边分别展开：左边利用 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 化简，右边利用完全平方公式展开，得到：

$$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$$

两边同时除以 2，并整理得：

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

此即两角差的余弦公式。

五、由诱导公式变形得到正弦公式

由诱导公式 $\sin \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ ，令 $\theta = \alpha + \beta$ ，可得：

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right)$$

将 $\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)$ 改写为 $(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \beta$ ，即：

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \left[\left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \beta \right]$$

对上式右端应用两角差的余弦公式 $\cos(x - u) = \cos x \cos u + \sin x \sin u$, 其中 $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $u = \beta$, 得到:

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \cos \beta + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \beta$$

再由诱导公式 $\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$ 与 $\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$ 代入, 即得:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

六、结论

两角和的正弦公式得证:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

该公式对任意角 α, β 均成立, 是三角恒等变换中最重要的基本公式之一。