

一元二次方程求根公式的推导

一元二次方程的一般形式为 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 其中 a, b, c 为常数。下面通过配方法推导其求根公式。

第一步: 化二次项系数为 1

因为 $a \neq 0$, 方程两边同除以 a , 得:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

第二步: 配方

把常数项移到右边, 并在两边同时加上一次项系数一半的平方 $(\frac{b}{2a})^2$, 即配方:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

第三步: 讨论判别式

记判别式 $\Delta = b^2 - 4ac$, 它的符号决定了方程根的情况:

- 当 $\Delta > 0$ 时, 方程有两个不相等的实数根;
- 当 $\Delta = 0$ 时, 方程有两个相等的实数根;
- 当 $\Delta < 0$ 时, 方程没有实数根。

第四步: 开方

当 $\Delta \geq 0$ 时, 对等式两边开平方, 得:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

第五步: 移项得到求根公式

把 $\frac{b}{2a}$ 移到右边, 即得一元二次方程的求根公式:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\Delta \geq 0)$$

公式总结

对于一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), 其求根公式为 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ 。
该公式成立的条件是 $a \neq 0$ 且 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$; 当 $\Delta = 0$ 时, 两根相等; 当 $\Delta > 0$ 时, 两根不相等。